Themen:

Funktionsuntersuchungen, Extrema mit und ohne Nebenbedingungen

Aufgabe A1:

Gegeben ist die Funktion $F(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2\cdot\left(x^2-y^2\right)=0$ in impliziter Form.

a) Bestimmen Sie die Tangentensteigung im Kurvenpunkt $P(x/y)$.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve im Punkt $P_1\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}/\frac{1}{2}\right)$ eine waagrechte Tangente besitzt.

Lösungen:

Wir berechnen die Ableitungen:

$$F_x=2\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x-2\cdot 2x=4x^3+4xy^2-4x \text{ und } F_y=4y^3+4yx^2+4y$$

(analoge Vorgehensweise bei der rechten partiellen Ableitung).

a) Im Falle eines beliebigen Kurvenpunkts gilt dann (solange der Nenner nicht Null wird)

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{4x^3+4xy^2-4x}{4y^3+4yx^2+4y}=-\frac{x^3+xy^2-x}{y^3+yx^2+y}=-\frac{x\cdot\left(x^2+y^2-1\right)}{y\cdot\left(y^2+x^2+1\right)}.$$

b) Setzen wir den Punkt ein, so erhalten wir im Zähler 0, nicht im Nenner, und daher auch $y'(P_1)=0$.

<u>*Rechnung:*</u>

$$y'(P_1)=-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1\right)}=-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0}{\frac{1}{2}\cdot 2}=\frac{0}{1}=0.$$

Aufgabe A2:

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $z=x+y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

Lösung:

Wir wenden die Lagrangeschen Multiplikatoren an. Es ist $x^2+y^2-1=:\varphi(x,y)$ die Nebenbedingung. Damit ergibt sich die Hilfsfunktion

$$F(x,y,\lambda)=x+y+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-1\right).$$

Von dieser bilden wir die drei offensichtlichen partiellen Ableitungen:

$$F_x=1+2\lambda x=0,\ F_y=1+2\lambda y=0 \text{ und } F_\lambda=x^2+y^2-1=0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Umformen, dass

$$\lambda = -\frac{1}{2x} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2y},$$

womit wir $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$ erhalten. Setzen wir das in die dritte Gleichung ein, so ergibt sich

$$2 \cdot \tfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Damit haben wir $x = y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ als Kandidaten und durch Einsetzen in $z = x + y$ erkennen wir für Minus ein Minimum und für Plus ein Maximum (Ablesen der Funktionswerte).

Aufgabe A3:

Bestimmen Sie die relativen Extremwerte der folgenden Funktionen.

a) $z = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$

b) $z = xy - 27 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

c) $z = 2x^3 - 3xy + 3y^3 + 1$

Lösungen:

Ergebnisse: Die Rechnungen basieren auf dem in der Vorlesung gezeigten Schema (Tag 03 – Seiten 22 und 23):

a) Kandidaten bei $(1/2), (1/-2), (0/0), (2/0)$: Davon sind die ersten beiden keine Extremwerte, die dritte Stelle ein Maximum und die letzte ein Minimum.

b) An der Stelle $(3/-3)$ liegt ein Maximum vor.

c) An der Stelle $(0/0)$ liegt kein Extremwert vor, an der Stelle $(0{,}44/0{,}38)$ existiert ein Minimum.

Rechnungen:

a) $z = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$

Erste Ableitungen:

- $z_x = 3y^2 + 12x^2 - 24x = 0$
- $z_y = 6xy - 6y = 0$

Diese beiden Gleichungen müssen **gleichzeitig** erfüllt sein!

LÖSUNGEN FINDEN (SCHRITT 1): Aus $z_y = 6xy - 6y = 6y \cdot (x-1) = 0$ folgen

1) $y = 0$ und x beliebig,

2) $x = 1$ und y beliebig.

Um die noch nicht bestimmbaren Variablen (beliebig) auf einen Wert festnageln zu können, setzen wir in die noch verbleibende Gleichung ein:

1) $y=0: 12x^2-24x=0 \Leftrightarrow 12x\cdot(x-2)=0$, also $x=0$ oder $x=2$.

↪ Wir haben die Kandidaten $P_1(0/0)$ und $P_2(2/0)$ gefunden.

2) $x=1: 3y^2+12-24=3y^2-12=0 \Leftrightarrow y^2=4$, also $y_{1/2}=\pm 2$.

↪ Wir haben die Kandidaten $P_3(1/-2)$ und $P_4(1/2)$ gefunden.

Potentielle Extremstellen

PUNKTE ÜBERPRÜFEN (SCHRITT 2):

Zweite Ableitungen:

- $z_{xx}=24x-24$
- $z_{yy}=6x-6$
- $z_{xy}=z_{yx}=6y$

Damit bilden wir die Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}$ und berechnen ihre Determinante für jeden der vier Punkte:

$P_1(0/0): \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 144 > 0$. Da $z_{xx}=-24<0$ liegt ein Maximum vor.

$P_2(2/0): \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 144 > 0$. Da $z_{xx}=24>0$ liegt ein Minimum vor.

$P_3(1/-2): \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0$. Kein Extremwert

$P_4(1/2): \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0$. Kein Extremwert

b) $z=xy-27\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$

Erste Ableitungen:

- $z_x=y+\frac{27}{x^2}=0$
- $z_y=x-\frac{27}{y^2}=0$

Diese beiden Gleichungen müssen **gleichzeitig** erfüllt sein!

LÖSUNGEN FINDEN (SCHRITT 1): Aus $z_x=y+\frac{27}{x^2}=0$ folgt

$$y=-\frac{27}{x^2}.$$

$x \neq 0$

Setzen wir nun in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$x-\frac{27}{\left(-\frac{27}{x^2}\right)^2}=x-\frac{x^4}{27}=0 \Leftrightarrow \underset{\underset{x=0}{\downarrow}}{x}\cdot\underset{\underset{x=3}{\downarrow}}{\left(1-\frac{x^3}{27}\right)}=0\text{, also } \cancel{x_1=0} \text{ und } x_2=3.$$

Fällt wegen $x \neq 0$ raus!

↳ **Potentielle Extremstelle: $P(3/-3)$** $\boxed{-\frac{27}{3^2}=y}$

PUNKTE ÜBERPRÜFEN (SCHRITT 2):

Zweite Ableitungen:

- $z_{xx}=-\frac{54}{x^3}$
- $z_{yy}=\frac{54}{y^3}$
- $z_{xy}=z_{yx}=1$

Damit bilden wir die Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}$ und berechnen ihre Determinante für den gefundenen Punkt:

$P(3/-3)$: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3>0$. Da $z_{xx}=-2<0$ liegt ein Maximum vor.

---

c) $z=2x^3-3xy+3y^3+1$

Erste Ableitungen:

- $z_x=6x^2-3y=0$
- $z_y=-3y+9y^2=0$

Diese beiden Gleichungen müssen **gleichzeitig** erfüllt sein!

LÖSUNGEN FINDEN (SCHRITT 1): Aus $z_x=6x^2-3y=0$ folgt

$$y=2x^2\ .$$

Setzen wir nun in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$-3x+9\cdot\left(2x^2\right)^2=-3x+36x^4=0 \Leftrightarrow -3\underset{\underset{x=0}{\downarrow}}{x}\cdot\underset{\underset{x=\sqrt[3]{\frac{1}{12}}}{\downarrow}}{\left(1-12x^2\right)}=0\text{, also } x_1=0 \text{ und } x_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{12}}\ .$$

↳ **Potentielle Extremstellen: $P_1(0/0)$** $\boxed{2\cdot 0^2=y}$ **und $P_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{12}}/2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{144}}\right)$** $\boxed{2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{12}}\right)^2=y}$

PUNKTE ÜBERPRÜFEN (SCHRITT 2):

Zweite Ableitungen:

- $z_{xx}=12x$

- $z_{yy} = 18y$
- $z_{xy} = z_{yx} = -3$

Damit bilden wir die Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}$ und berechnen ihre Determinante für die beiden gefundenen Punkte:

$P_1(0/0)$: $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$.   Kein Extrempunkt

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{12}} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{144}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{12}} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{12^2}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{12^3}} = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{12}\right)^3} = \tfrac{1}{12}$$

$P_2\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{12}} / 2 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{144}}\right)$: $\begin{vmatrix} 12 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{12}} & -3 \\ -3 & 36 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{144}} \end{vmatrix} = 12 \cdot 36 \cdot \tfrac{1}{12} - 9 = 27 > 0$.

Da $z_{xx} = 12 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{12}} > 0$ liegt ein Minimum vor.

Aufgabe A4:

Welcher Punkt auf der Ebene $2x + 3y + z = 14$ hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand? Bestimmen Sie den Punkt zur Kontrolle auch mit Hilfe der aus der Analytischen Geometrie bekannten Techniken.

Lösung:

Alte Variante:

In der Analytischen Geometrie bestimmen wir einen Normalenvektor (z.B. $(2 \quad 3 \quad 1)^T$) der Ebene, stellen damit eine Hilfsgerade durch den Ursprung ($g : \vec{x} = t \cdot (2 \quad 3 \quad 1)^T$) auf und berechnen deren Durchstoßpunkt durch die Ebene (Einsetzen ergibt $t = 1$ und daher den Punkt $D(2/3/1)$). Damit haben wir den gesuchten Punkt gefunden.

Neue Variante:

Im hier vorliegenden Fall stellen wir die Abstandsfunktion $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ unter der Nebenbedingung $2x + 3y + z - 14 = 0$ auf. Damit erhalten wir die Hilfsfunktion

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda \cdot (2x + 3y + z - 14).$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\lambda = 0,\ F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 3\lambda = 0,\ F_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = 0$$

und $F_\lambda = 2x + 3y + z - 14 = 0$.

Aus diesem Gleichungssystem folgt (*Rechnungen: Mit Gleichungen 1 bis 3 – Gleichung 3 nach λ aufgelöst und dann in die Gleichungen 1 und 2 eingesetzt*), dass $x = 2z$ und $y = 3z$ ist und mit der Nebenbedingung erhalten wir $x = 2$, $y = 3$ und $z = 1$.

Aufgabe A5:

Gegeben seien zwei Exponentialfunktionen $y_1 = e^{ax}$ und $y_2 = e^{-bx}$ mit $a, b > 0$. Bestimmen Sie a und b so, dass sich die Kurven rechtwinklig schneiden und der Flächeninhalt, den sie mit der x-Achse einschließen, möglichst klein wird.

Lösung:

Alte Variante:

Hier wollen wir den Flächeninhalt, den die beiden Funktionen mit der x-Achse einschließen maximieren.

- $A = \int_{-\infty}^{0} e^{ax} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-bx} dx = \left[\frac{1}{a} e^{ax}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{b} e^{-bx}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$),
- unter der Nebenbedingung, dass $y_1'(0) \cdot y_2'(0) = -1$, d.h. $ab = 1$.

Hieraus sehen wir sofort, dass $a = \frac{1}{b}$, also $A(b) = b + \frac{1}{b}$ maximiert werden muss. Es ist $A'(b) = 1 - \frac{1}{b^2} = 0$ und damit (weil $b > 0$) folgt $b = a = 1$. Der minimale Flächeninhalt ist dann $A_{\min} = 2$ (Einsetzen in die Formel aus Punkt 1).

Neue Variante:

Wir übernehmen aus der Lösung „Alte Variante“ die Formel

$$A(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Diese Funktion gilt es nun unter der Nebenbedingung $ab = 1$ zu minimieren (haben wir auch aus „Alte Variante“ übernommen). Wir bereiten Lagrange vor:

$$A(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ und } \varphi(a,b) = ab - 1$$

$$\Rightarrow F(a,b,\lambda) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \lambda \cdot (ab - 1)$$

Hilfsfunktion

Diese Hilfsfunktion verarbeiten wir nach dem Schema im Skript mit Hilfe der möglichen Ableitungen weiter.

Ableitungen:

Division

$$\left.\begin{array}{l} F_a = -\frac{1}{a^2} + \lambda b = 0 \\ F_b = -\frac{1}{b^2} + \lambda a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda b = \frac{1}{a^2} \\ \lambda a = \frac{1}{b^2} \end{array}\right\} \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a = b$$

Einsetzen

$$F_\lambda = ab - 1 = 0$$

$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = a = \pm 1$ und da $a, b > 0$ folgt $a = b = 1$.

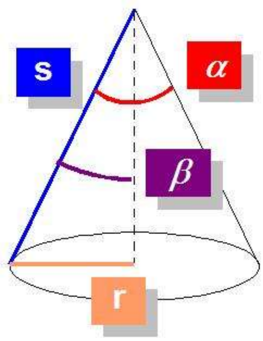
Die Funktionen haben damit die Funktionsgleichungen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$ und wir erhalten die Fläche $A_{\min} = 2$.

Aufgabe A6:

Wie muss der Öffnungswinkel α eines kegelförmigen Trichters mit dem Volumen $V = 10\,\text{cm}^3$ gewählt werden, wenn bei konstanter Dicke des verwendeten homogenen Blechs, der Materialverbrauch möglichst gering ausfallen soll.

Lösungen:

Lösung mit Lagrange:



Es gilt $M = \pi r s$.

Wir setzen $\beta = \frac{\alpha}{2}$ und erhalten $\frac{r}{s} = \sin\beta \Leftrightarrow s = \frac{r}{\sin\beta}$.

ZU MINIMIERENDE FUNKTION: $M = \dfrac{\pi r^2}{\sin\beta} =: M(r, \beta)$

ZUR NEBENBEDINGUNG: Die Nebenbedingung ist über das konstante Volumen gegeben, d.h. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, wobei wir hier $\tan\beta = \frac{r}{h} \Leftrightarrow h = \frac{r}{\tan\beta}$. Für Lagrange haben wir somit

$$\varphi(r, \beta) = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{\tan\beta} - V(r, \beta).$$

Damit können wir die Hilfsfunktion aufstellen:

$$F(r, \beta, \lambda) = \frac{\pi r^2}{\sin\beta} + \lambda \cdot \left(\frac{\pi r^3}{3 \cdot \tan\beta} - V\right) = \underbrace{\frac{\pi r^2}{\sin\beta} + \lambda \cdot \left(\frac{\pi r^3 \cdot \cos\beta}{3 \cdot \sin\beta} - V\right)}_{\text{Besser zum Ableiten!}}$$

Hilfsfunktion

Nun bilden wir die benötigten Ableitungen.

Ableitungen:

(*)

$$F_r = \frac{2\pi r}{\sin\beta} + \lambda \cdot \frac{\pi r^2}{\tan\beta} = 0$$

Einsetzen

$$F_\beta \underset{\text{QR}}{=} \frac{-\cos\beta \cdot \pi r^2}{\sin^2\beta} + \frac{\lambda\pi r^3}{3} \cdot \frac{-\sin^2\beta - \cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{-\cos\beta \cdot \pi r^2}{\sin^2\beta} - \frac{\lambda\pi r^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi r^2 \cdot \cos\beta + \lambda\pi r^3}{\sin^2\beta} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3\pi r^2 \cdot \cos\beta}{\pi r^3} = -\frac{3\cos\beta}{r}$$

$$F_\lambda = \frac{\pi r^3 \cdot \cos\beta}{3 \cdot \sin\beta} - V = 0$$

Weitere Rechnungen zu (*): $\frac{2\pi r}{\sin\beta} - \frac{3\cos\beta}{r} \cdot \frac{\pi r^2}{\tan\beta} = 0 \qquad \Big| \cdot \sin\beta$

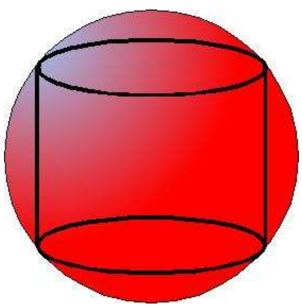
$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$$\Leftrightarrow 2\pi r - 3\cos^2\beta \cdot \pi r = 0 \overset{:\pi r}{\Leftrightarrow} \cos^2\beta = \frac{2}{3}$$

Hiermit erhalten wir $\beta \approx 35{,}26° \Leftrightarrow \alpha = 2\beta \approx 70{,}53°$. Durch Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt sich mit Hilfe des bekannten Volumens den Radius $r = 1{,}89$ cm.

Aufgabe A7:

Einer Kugel K mit dem gegebenen Radius r_K werde ein Zylinder einbeschrieben (siehe Figur 1). Wie sind die Höhe h_Z und der Radius r_Z des Zylinders in Abhängigkeit von r_K zu wählen, damit die Mantelfläche des Zylinders maximal wird?

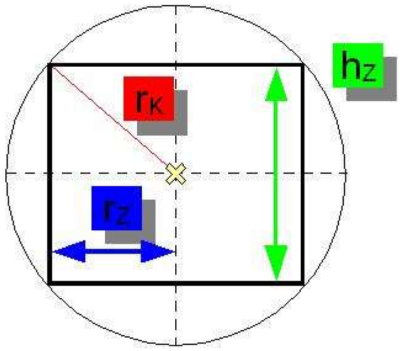


Figur 1: Kugel mit einbeschriebenem Zylinder.

Lösung:

Alte Variante:

Da sowohl der Zylinder, als auch die Kugel rotationssymmetrisch sind, können wir uns eine zweidimensionale Skizze anfertigen, die alle notwendigen Informationen enthält (siehe Figur 2).



Figur 2: Zylinder und Kugel von der Seite betrachtet.

Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$M_Z = \underbrace{2\pi r_Z h_Z}_{\text{Mantelfläche}} .$$

Momentan haben wir noch zwei Unbekannte in dieser Gleichung. Das wollen wir nun ändern. Mit Hilfe von Figur 2 können wir sehen, dass

$$r_Z^2 + \left(\frac{h_Z}{2}\right)^2 = r_K^2 \Leftrightarrow r_Z^2 = r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2 .$$

Durch die gegebenen Bedingungen gilt, dass $0 \le h_Z \le 2r_K$. Des Weiteren ist $r_K > 0$. Wir setzen nun ein und erhalten

$$M_Z(h_Z) = 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} \cdot h_Z .$$

Diese Funktion leiten wir ab und setzen die Ableitung gleich 0.

$$M_Z'(h_Z) = 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} - 2\pi \frac{h_Z}{2\sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2}} \cdot \frac{1}{2}h_Z$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} - \pi \frac{h_Z^2}{2\sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2}} = 0.$$

Wir dividieren anschließend durch π und multiplizieren mit dem Wurzelterm durch. Damit ergibt sich

$$2 \cdot \left(r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2\right) - \frac{h_Z^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2r_K^2 - h_Z^2 = 0 \Leftrightarrow 2r_K^2 = h_Z^2 .$$

Indem wir die Wurzel ziehen, erhalten wir $h_Z = \sqrt{2} \cdot r_K$. Mit der zweiten Ableitung, welche da ist

$$M_Z''(h_Z) = \frac{2\pi h_Z \cdot (h_Z^2 - 6r_K^2)}{\sqrt{(4r_K^2 - h_Z^2)^3}},$$

sehen wir, dass wegen

$$M_Z''(\sqrt{2} \cdot r_K) = -4\pi r_K < 0$$

wirklich ein Maximum vorliegt. Da die Randwerte $h_{Z,R1} = 0$ und $h_{Z,R2} = 2r_K$ beide die Mantelfläche 0 liefern, liegt wirklich das gesuchte, globale Maximum vor. Es sind also

$$h_Z = \sqrt{2} \cdot r_K \text{ und } r_Z = \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{2} \cdot r_K)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_K.$$

Neue Variante:

Nach der „Alten Variante" wissen wir (mit $r_Z =: x$ und $h_Z =: y$), dass

$$M(x,y) = 2\pi xy \text{ mit } x, y > 0.$$

konstant (= r_K)

Die Nebenbedingung lautet $x^2 + \frac{y^2}{4} = r^2 \Leftrightarrow \varphi(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - r^2 = 0$. Wir bilden damit die Hilfsfunktion:

$$F(x,y,\lambda) = 2\pi xy + \lambda \cdot \left(x^2 + \tfrac{y^2}{4} - r^2\right)$$

Hilfsfunktion

Ableitungen:

Division

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2\pi y + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= 2\pi x + \tfrac{1}{2}\lambda y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2\pi y &= -2\lambda x \\ 2\pi x &= -\tfrac{1}{2}\lambda y \end{aligned}\right\} \quad \frac{y}{x} = \frac{4x}{y} \Leftrightarrow y^2 = 4x^2$$

Einsetzen

$$F_\lambda = x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 - r^2 = 0$$

Rechnung hierzu:

$$x^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 4x^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \tfrac{1}{2}r^2$$

und da $x > 0$ ist $x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$ (Radius) und daher $y = \sqrt{2} \cdot r$ (Höhe). Diese Ergebnisse haben wir natürlich auch in der „Alten Variante" erhalten.