Themen:

Mehrfachintegrale – Doppelintegrale

Aufgabe A1:

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Doppelintegrale:

a) $$I = \int_{x=1}^{3} \int_{y=0}^{\pi x/2} \cos\left(\tfrac{y}{x}\right) dy dx = \ldots$$

b) $$I = \int_{u=1}^{\infty} \int_{v=-1}^{1} (u-v) \cdot e^{-u} dv du = \ldots$$

c) $$I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx dy = \ldots$$

Lösungen:

Normale Cosinus - Integration, Umkehrung der Kettenregel

a) $$I = \int_{x=1}^{3} \int_{y=0}^{\pi x/2} \cos\left(\tfrac{y}{x}\right) dy dx = \int_{x=1}^{3} \left[x \cdot \sin\left(\tfrac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{\pi x/2} dx = \int_{x=1}^{3} \left[x \cdot \sin\left(\tfrac{\pi x}{2x}\right) - x \cdot \sin(0)\right] dx = \int_{x=1}^{3} x dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} x^2\right]_{x=1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

b) $$I = \int_{u=1}^{\infty} \int_{v=-1}^{1} (u-v) \cdot e^{-u} dv du$$

Innere Integration:

$$e^{-u} \cdot \int_{v=-1}^{1} (u-v) \cdot \cancel{e^{-u}} dv = \left[uv - \tfrac{1}{2} v^2\right]_{v=-1}^{1} \cdot e^{-u} = e^{-u} \cdot \left[u - \tfrac{1}{2} + u + \tfrac{1}{2}\right] = 2u \cdot e^{-u}$$

Hier möglich, da unabhängig von v!

Funktionsterm für die äußere Integration

Äußere Integration:

Uneigentliches Integral

ersetzen

$$\int_{u=1}^{\infty} 2u \cdot e^{-u} du \Rightarrow 2 \cdot \int_{u=1}^{\lambda} u \cdot e^{-u} du \underset{\text{pI}}{=} \left| \begin{array}{ll} f = u & g' = e^{-u} \\ f' = 1 & g = -e^{-u} \end{array} \right| = 2 \cdot \left[-u \cdot e^{-u}\right]_{u=1}^{\lambda} + 2 \cdot \int_{u=1}^{\lambda} e^{-u} du$$

$$= 2 \cdot \left[-u \cdot e^{-u} - e^{-u}\right]_{u=1}^{\lambda} = 2 \cdot \left[-e^{-u} \cdot (u+1)\right]_{u=1}^{\lambda} = -2 \cdot e^{-\lambda} \cdot (\lambda + 1) + 2 \cdot 2 \cdot e^{-1}$$

$$= -2e^{\lambda} \cdot (\lambda + 1) + 4e^{1} =: I(\lambda)$$

GRENZWERTBILDUNG: $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda) \underset{\text{l'Hospital}}{=} 0 + 4e^{-1} \approx 1{,}4715$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \underbrace{=}_{\text{Fall: } \frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

c) $I = \int\limits_{y=0}^{1}\int\limits_{x=0}^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int\limits_{y=0}^{1}\left[y\cdot e^{\frac{x}{y}}\right]_{x=0}^{y^2} dy = \int\limits_{y=0}^{1}\left[y\cdot e^{y} - y\right]dy = \left[ye^{y} - e^{y} - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{1}$

Kettenregel umgekehrt

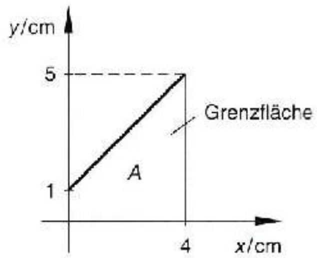
Partielle Integration

$$= 1\cdot e^{1} - e^{1} - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - 0 + 1 - 0 = \tfrac{1}{2}$$

Aufgabe A2:

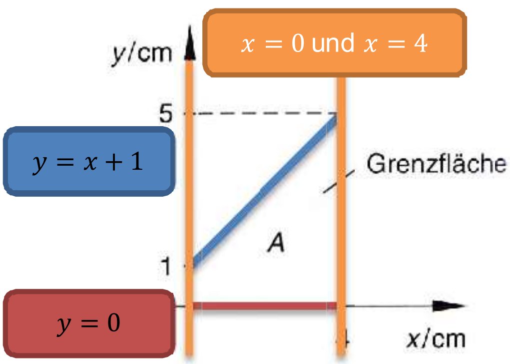
Die in Figur 1 skizzierte trapezförmige Grenzfläche A zweier dielektrischer Medien enthält die ortsabhängige Oberflächenladung $\sigma(x,y) = k\cdot x^2 y$ mit $k = 1{,}5\cdot 10^{-10}$ As/cm^5. Berechnen Sie die Gesamtladung Q auf der Grenzfläche nach der Formel

$$Q = \iint\limits_{(A)} \sigma(x,y)\,dA\,.$$



Figur 1: Trapezförmige Grenzfläche.

Lösung:



Aus der Skizze sind die Integrationsgrenzen zu entnehmen. Da y von x abhängt, integrieren wir zuerst nach y. Es ist dabei $\sigma(x,y)=k\cdot x^2\cdot y$.

$$Q=k\cdot\int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{x+1}\left(x^2y\right)dydx=k\cdot\int_{x=0}^{4}\left[\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{x+1}dx=k\cdot\int_{x=0}^{4}\left(\tfrac{1}{2}x^2\cdot(x+1)^2\right)dx=\tfrac{k}{2}\cdot\int_{x=0}^{4}\left(x^4+2x^3+x^2\right)dx$$

Möglich, da von den Variablen unabhängig!

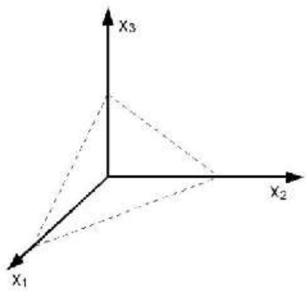
1. Binomische Formel

$$=\tfrac{k}{2}\cdot\left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{4}=\tfrac{2656}{15}k=2{,}656\cdot10^{-8}\,\text{As}$$

Mathematik fertig, nur Zahlenwert für k noch eingesetzt

Aufgabe A3:

Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen der Dreieckspyramide, die durch die Koordinatenachsen im kartesischen Koordinatensystem und die Ebene mit der Koordinatengleichung $x_1+2x_2+3x_3=12$ im ersten Oktanten begrenzt wird.



Figur 2: Skizze der gesuchten Dreieckspyramide.

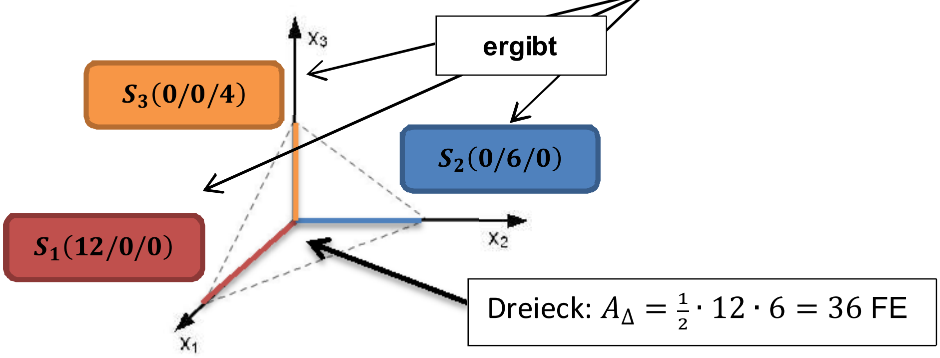
Lösung:

Lösung ohne Integralrechnung:

Aus der Koordinatengleichung können wir sofort die drei Spurpunkte ablesen:

$$x_1+2x_2+3x_3=12\Leftrightarrow\tfrac{1}{12}x_1+\tfrac{1}{6}x_2+\tfrac{1}{4}x_3=1$$

Davon die Kehrwerte nehmen



Da wir eine Pyramide mit der Grundfläche A_Δ vorliegen haben, können wir wie folgt das Volumen derselben berechnen:

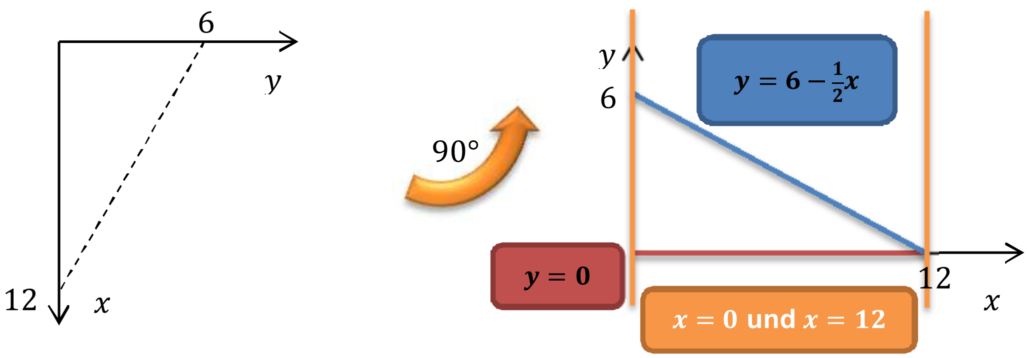
$$V_P = \tfrac{1}{3}\cdot A_\Delta \cdot h = \tfrac{1}{3}\cdot 36\cdot 4 = 48 \text{ VE.}$$

Lösung mit Integralrechnung:

Hier formen wir erst einmal nach z ($z = x_3$) um (nach den anderen Variablen ist dies aber auch möglich):

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \to x + 2y + 3z = 12 \Leftrightarrow z = 4 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y$$

Die Integrationsgrenzen entnehmen wir aus folgender Skizze (Betrachtung der Pyramide von oben):



Nun können wir das Integral aufstellen (z ist die Integrandfunktion, die Grenzen sind dem rechten Teil der Skizze zu entnehmen) und berechnen:

$$V_P = \iint_{(A)} z(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{12}\int_{y=0}^{6-\frac{1}{2}x}\left(4 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y\right)dy\,dx = \int_{x=0}^{12}\left[4y - \tfrac{1}{3}xy - \tfrac{1}{3}y^2\right]_{y=0}^{6-\frac{1}{2}x} dx$$

2. Binomische Formel mit Minusklammer

$$= \int_{x=0}^{12}\left(4\cdot\left(6-\tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{1}{3}x\cdot\left(6-\tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{1}{3}\cdot\left(6-\tfrac{1}{2}x\right)^2\right)dx = \int_{x=0}^{12}\left(24 - 2x - 2x + \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{36}{3} + 2x - \tfrac{1}{12}x^2\right)dx$$

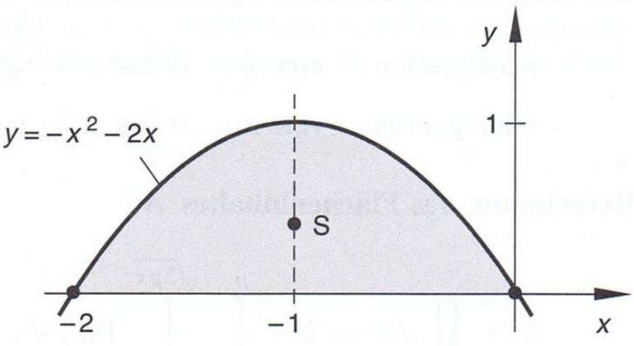
$$= \int_{x=0}^{12}\left(\tfrac{1}{12}x^2 - 2x + 12\right)dx = \left[\tfrac{1}{36}x^3 - x^2 + 12x\right]_{x=0}^{12} = \tfrac{1}{36}\cdot 12^3 - 12^2 + 12\cdot 12 = \tfrac{1}{3\cdot\cancel{12}}\cdot 12^{\cancel{3}\,2}$$

$$= \frac{144}{3} = 48 \text{ VE}$$

Etwas umständlicher die „Lösung ohne Integralrechnung“, aber es funktioniert!

Aufgabe A4:

Bestimmen Sie den Schwerpunkt S der zwischen der Parabel $y=-x^2-2x$ und der x-Achse gelegenen Fläche.



Figur 3: Parabel und Schwerpunkt.

Lösung:

Wir benötigen für die Berechnung erst einmal den Flächeninhalt. Diesen können wir mit dem stinknormalen Einfachintegral berechnen[1]:

<u>Flächenberechnung:</u>

$$A=\int_{-2}^{0}\left(-x^2-2x\right)dx=\left[-\tfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}=\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3+(-2)^2=4-\tfrac{8}{3}=\tfrac{4}{3}\,\mathrm{FE}$$

Anschließend können wir uns der eigentlichen Schwerpunktberechnung zuwenden, indem wir die Formel aus dem Skript bemühen. Durch die offensichtliche Symmetrie zur Achse $x=-1$ muss der x-Wert des Schwerpunkts natürlich $x_S=-1$ sein:

<u>Berechnung des Schwerpunktes (nur der y-Wert ist zur berechnen):</u>

$(-x^2-2x)^2=(x^2+2x)^2$

$$y_S=\tfrac{1}{A}\iint_{(A)}y\,dA=\frac{1}{\frac{4}{3}}\cdot\int_{x=-2}^{0}\int_{y=0}^{-x^2-2x}y\,dy\,dx=\frac{3}{4}\cdot\int_{x=-2}^{0}\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{-x^2-2x}dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{x=-2}^{0}\left(-x^2-2x\right)^2dx$$

$$\underset{1.\,\mathrm{BF}}{=}\frac{3}{8}\cdot\int_{x=-2}^{0}\left(x^4+4x^3+4x^2\right)dx=\frac{3}{8}\cdot\left[\tfrac{1}{5}x^5+x^4+\tfrac{4}{3}x^3\right]_{x=-2}^{0}=\frac{3}{8}\cdot\left[\tfrac{32}{5}-16+\tfrac{32}{3}\right]=\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{15}=\frac{2}{5}$$

Damit ist der Schwerpunkt $S\left(-1/\tfrac{2}{5}\right)$.

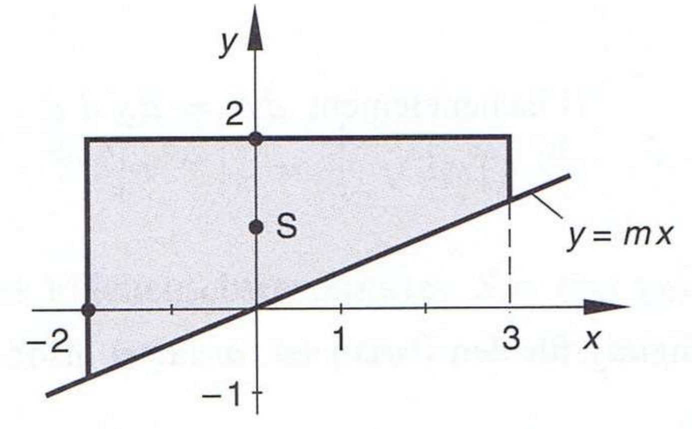
Aufgabe A5:

Die in Abbildung 3 skizzierte trapezförmige Fläche wird von unten von der Geraden $y=mx$ berandet.

[1] Dies sollte Sie vor keine nennenswerten Probleme stellen, zumal wir nur eine ganzrationale Funktion zu integrieren haben!

a) Wie muss man die Steigung m wählen, damit der Flächenschwerpunkt S auf der y-Achse liegt?

b) Bestimmen Sie die genaue Position des Schwerpunktes.



Figur 4: Schwerpunktanpassung.

Lösungen:

a) Damit der Schwerpunkt auf der y-Achse liegt, müssen wir $x_S = 0$ fordern. Die Grenzen beim Integrieren ergeben sich aus Figur 4. Wir formulieren daher:

$$x_S = \tfrac{1}{A}\iint\limits_{(A)} x\,dA = \tfrac{1}{A}\int\limits_{x=-2}^{3}\int\limits_{y=mx}^{2} x\,dy\,dx = 0 \overset{\cdot A}{\Rightarrow} \int\limits_{x=-2}^{3}\int\limits_{y=mx}^{2} x\,dy\,dx = 0$$

Integralberechnung:

$$\int\limits_{x=-2}^{3}\int\limits_{y=mx}^{2} x\,dy\,dx = \int\limits_{x=-2}^{3}\left[xy\right]_{y=mx}^{2} dx = \int\limits_{x=-2}^{3}\left(2x - mx^2\right)dx = \left[x^2 - \tfrac{m}{3}x^3\right]_{x=-2}^{3} = 9 - 9m - 4 - \tfrac{8}{3}m$$

$$= 5 - \tfrac{35}{3}m = 0 \Rightarrow m = \tfrac{3}{7}$$

b) Um die Koordinaten des Schwerpunkts zu bestimmen, müssen wir nur noch die y-Koordinaten berechnen, die x-Koordinate kennen wir bereits aus Teil a). Zuerst kümmern wir uns den Flächeninhalt, den wir nach der bekannten Formel aus dem 2. Semester berechnen:

$$A = \int\limits_{a}^{b}\left(f(x) - g(x)\right)dx$$

für den Flächeninhalt zwischen den Schaubildern zweier Funktionen f und g in den gegebenen Grenzen.

Flächeninhalt:

$$\int_{x=-2}^{3}\left(2-\tfrac{3}{7}x\right)dx=\left[2x-\tfrac{3}{14}x^2\right]_{-2}^{3}=\frac{125}{14}\,\text{FE}=A$$

Berechnung der fehlenden Koordinate:

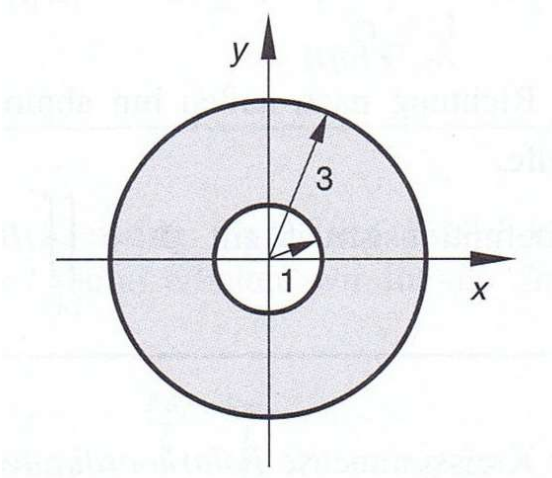
$$y_S=\frac{1}{A}\iint_{(A)} y\,dA=\frac{14}{125}\int_{x=-2}^{3}\int_{y=\frac{3}{7}x}^{2} y\,dy\,dx=\frac{14}{125}\int_{x=-2}^{3}\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{3}{7}x}^{2}dx=\frac{14}{125}\int_{x=-2}^{3}\left(2-\tfrac{9}{98}x^2\right)dx$$

$$=\frac{14}{125}\cdot\left[2x-\tfrac{3}{98}x^3\right]_{x=-2}^{3}=\frac{14}{125}\cdot\left[6-\tfrac{81}{98}+4-\tfrac{24}{98}\right]=\frac{14}{125}\cdot\frac{875}{98}=\frac{98}{98}=1$$

Der Schwerpunkt ist also $S(0/1)$.

Aufgabe A6:

Berechnen Sie $I=\iint_{(A)}\left(3\cdot\sqrt{x^2+y^2}+4\right)dA$. Die Fläche ist in Figur 5 abgebildet.



Figur 5: Fläche für Aufgabe 6.

Lösung:

Aufgrund der Rotationssymmetrie bietet es sich an, in Polarkoordinaten zu rechnen. Dazu müssen wir die Transformationsregeln beachten:

$x=r\cdot\cos\varphi$ und $y=r\cdot\sin\varphi$

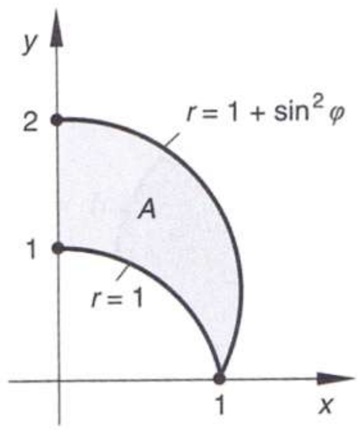
$dA=rdrd\varphi$

$$I=\iint_{(A)}\left(3\cdot\sqrt{x^2+y^2}+4\right)dA=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{3}\left(3\cdot\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}+4\right)\cdot rdrd\varphi$$

$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{3}\left(3r^2+4r\right)drd\varphi=2\pi\cdot\int_{r=1}^{3}\left(3r^2 4r\right)dr=2\pi\cdot\left[r^3+2r^2\right]_{r=1}^{3}=2\pi\cdot 42=84\pi$$

Aufgabe A7:

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des im ersten Quadranten gelegenen Flächenstücks, das durch die Kurve $r = 1 + \sin^2\varphi$ und den Einheitskreis berandet wird (r, φ sind Polarkoordinaten, Figur 6 zeigt die Fläche).



Figur 6: Fläche zu Aufgabe 7.

Lösung:

Die Integrationsgrenzen sind Figur 6 zu entnehmen. Dabei gilt:

<u>*Radius:*</u> $r = 1$ (unten) und $r = 1 + \sin^2\varphi$ (oben)

<u>*Winkel:*</u> $\varphi = 0$ (unten) und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (oben, Viertelkreis)

Damit können wir die Flächenberechnung unter Berücksichtigung der Transformationsregeln durchführen:

$dA = rdrd\varphi$

$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} \underset{1.\,\mathrm{BF}}{=} \tfrac{1}{2} \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4\varphi + 2\sin^2\varphi\right) d\varphi = \ldots$$

Integrale:

- $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x - \sin x \cdot \cos x\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)$
- $\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\cdot\int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x$ für $n \geq 2$

= 0

$$\ldots = \tfrac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\left(\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{\sin(2\varphi)}{4}\right) - \tfrac{\sin^4\varphi\cdot\cos\varphi}{4} + \tfrac{3}{4}\cdot\left(\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ldots = \frac{11}{32}\pi$$

= 0