Themen:

Mehrfachintegrale – Hier zumeist Dreifach-integrale

Aufgabe A1:

Berechnen Sie

$$I=\int_{\varphi=\pi}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{r^2} rz\cdot\sin(\varphi)\,dz\,dr\,d\varphi\,.$$

Lösung:

Wir berechnen das Integral in drei Schritten, von innen nach außen:

Schritt 1 – Integration nach z

$$\int_{z=r}^{r^2}(rz\cdot\sin\varphi)\,dz=\left[\tfrac{1}{2}z^2r\cdot\sin\varphi\right]_{z=r}^{r^2}=\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cdot\left(r^5-r^3\right)$$

Schritt 2 – Integration nach r

$$\int_{r=0}^{1}\left(\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cdot\left(r^5-r^3\right)\right)dr=\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cdot\left[\tfrac{1}{6}r^6-\tfrac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{1}=-\tfrac{1}{24}\sin\varphi$$

Schritt 3 – Integration nach φ

$$\int_{\varphi=\pi}^{2\pi}\left(-\tfrac{1}{24}\sin\varphi\right)d\varphi=-\tfrac{1}{24}\cdot\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=\pi}^{2\pi}=\tfrac{1}{24}\cdot\left(\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}-\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\right)=\frac{1}{12}$$

Aufgabe A2:

Welches Volumen V besitzt ein Körper, der durch Drehung der Kurve $z=1+\cos x$ mit $0\leq x\leq\pi$ um die z-Achse entsteht?

Lösung:

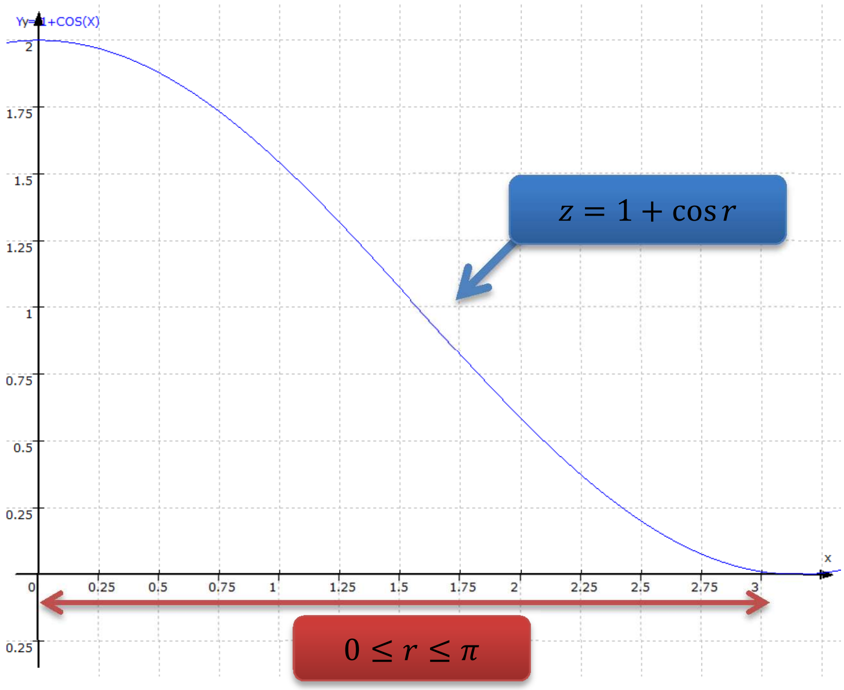
Wir tragen zuerst einmal die Daten zusammen, welche wir für die Berechnung des Volumens mittels eines Dreifachintegrals benötigen. Da ein Drehkörper vorliegt, bietet es sich an, in Zylinderkoordinaten zu rechnen und die Ersetzungsregel aus der Vorlesung zu benutzen.

Drehkörper:

Da ein Drehkörper vorliegt, dürfen wir einfach x durch r ersetzen:

$$z=1+\cos x\xrightarrow{\text{ersetzen}}z=1+\cos r$$

Betrachten wir nun das Schaubild der Funktion:



Skizze: Schaubild der Funktion im in der Aufgabe genannten Bereich.

Für die einzelnen Variablen erhalten wir (gemäß der Zeichnung und weil ein Drehkörper vorliegt) die folgenden Intervalle:

- Für z: von $z = 0$ bis $z = 1 + \cos r$
- Für r: von $r = 0$ bis $r = \pi$ (siehe Skizze, Nullstelle dort)
- Für φ: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ (Drehkörper, d.h. eine volle Umdrehung)

Damit können wir (unter Berücksichtigung der Transformationsregeln), das Integral aufstellen und berechnen:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\pi} \int\limits_{z=0}^{1+\cos r} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\pi} [rz]_{z=0}^{1+\cos r}\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\pi} (r + r \cdot \cos r)\,dr\,d\varphi$$

Integration nach φ zuerst, da Integrandfunktion unabhängig davon $\Rightarrow$ Faktor 2π

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{r=0}^{\pi} (r + \underbrace{r \cdot \cos r}_{\text{Partielle Integration}})\,dr \underset{\text{pI}}{=} 2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{2} r^2 + \cos r + r \cdot \sin r\right]_{r=0}^{\pi} = 2\pi \cdot \left[\tfrac{\pi^2}{2} + \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \cancel{\pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{=0}}\right.$$

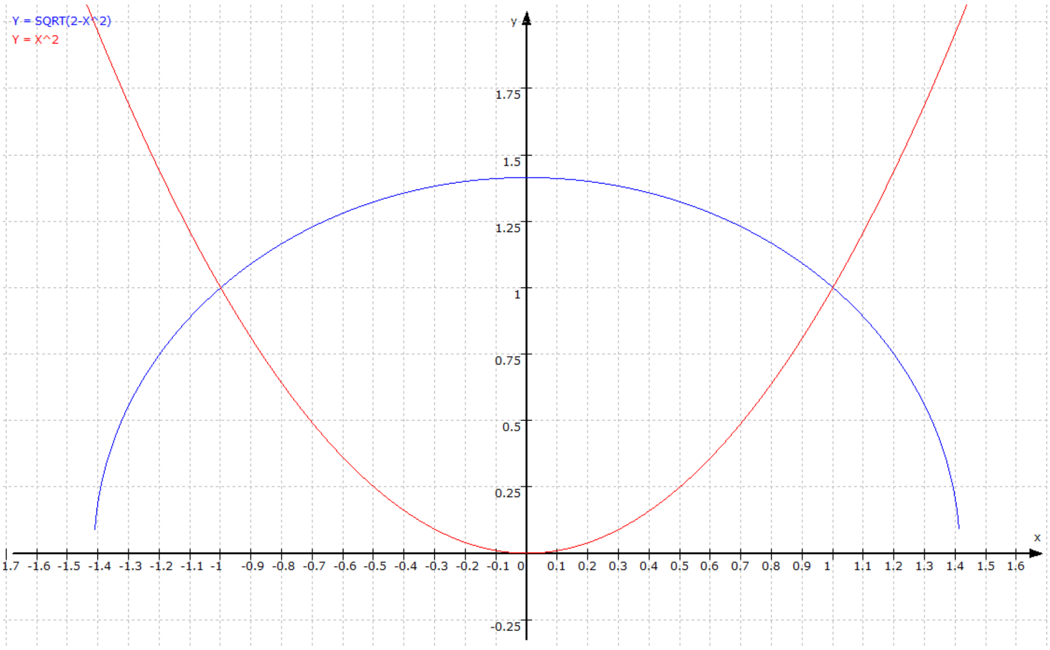
$$\left. - \cancel{\underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot 0^2}_{=0}} - \underbrace{\cos 0}_{=1} - \cancel{0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0}}\right] = 2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{2}\pi^2 - 2\right] = \pi^3 - 4\pi \approx 18{,}4399 \text{ VE}$$

Aufgabe A3:

Die durch den Kreis $x^2 + z^2 = 2$ und die Parabel $z = x^2$ begrenzte Fläche erzeugt bei der Rotation um die z-Achse einen Rotationskörper, dessen Volumen V zu bestimmen ist.

Lösung:

Zuerst einmal müssen wir feststellen, wie die Integrationsgrenzen lauten. Mit Hilfe einer Skizze und einer kleinen Rechnung wollen wir das bewerkstelligen.



Skizze: Der Kreis und die Parabel aus Aufgabe A3.

Um die x-Werte der Schnittpunkte zu erhalten, müssen wir eine kleine Rechnung durchführen:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 2 \\ z &= x^2 \end{aligned}\right\} \text{einsetzen liefert}: z + z^2 = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

$z = -2$ löst die Gleichung zwar auch, aber es gibt dann keine reelle Zahl für x, so dass die Kreisgleichung erfüllt werden kann. Da wir einen Drehkörper berechnen wollen, können wir wieder x durch r ersetzen:

- Für z: von $z = r^2$ bis $z = \sqrt{2 - r^2}$
- Für r: von $r = 0$ bis $r = 1$ (siehe Skizze, Schnittpunkte dort betrachten)
- Für φ: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ (Drehkörper, d.h. eine volle Umdrehung)

Damit können wir das Volumenintegral aufstellen, wobei wir die *Transformationsregeln* wieder beachten müssen.

$$V=\iiint\limits_{(V)} dV=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi=2\pi\cdot\int\limits_{r=0}^{1}\left[rz\right]_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}}dr=2\pi\cdot\int\limits_{r=0}^{1}\left(r\cdot\sqrt{2-r^2}-r^3\right)dr$$

Keine Abhängigkeit vom Winkel

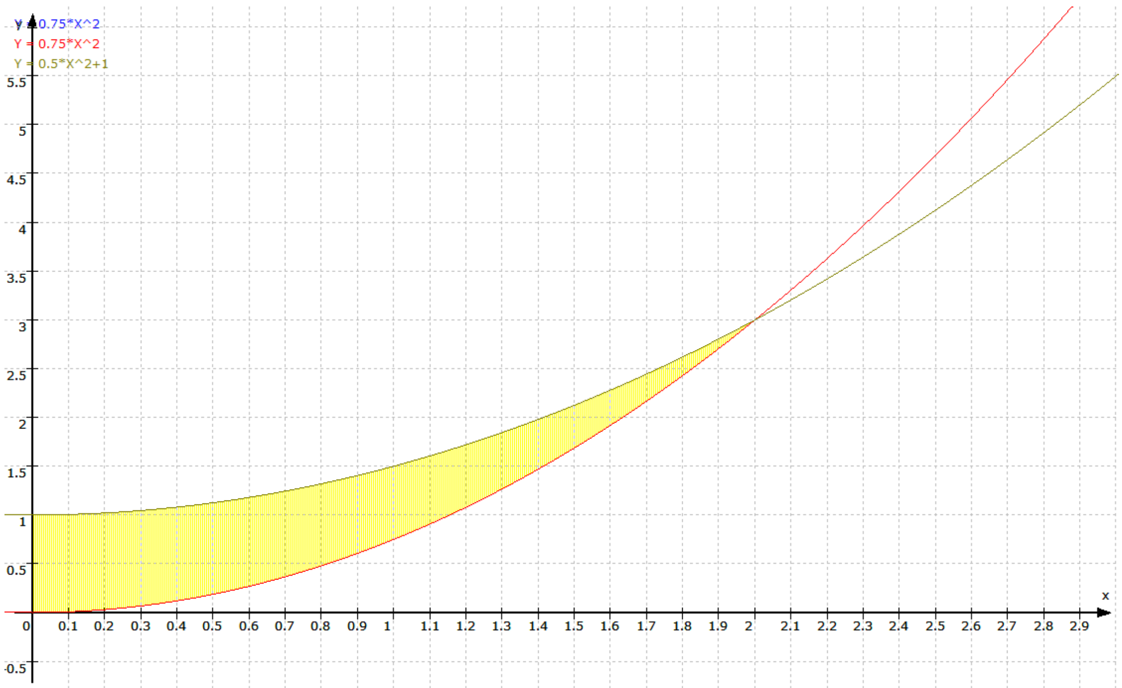
Integration mit Substitution: $u=2-r^2$ und damit dann $\frac{du}{dr}=-2r$, also $dr=-\frac{1}{2r}du$

$$=2\pi\cdot\left[-\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(2-r^2\right)^3}-\tfrac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{1}=2\pi\cdot\left[-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}+0\right]=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\approx 2{,}2587\text{ VE}$$

Aufgabe A4:

Skizzieren Sie das im 1. Quadranten gelegene Flächenstück, das durch die Kurven $z=0{,}75x^2$, $z=0{,}5x^2+1$ und $x=0$ berandet wird. Welches Rotationsvolumen V entsteht bei der Drehung dieser Fläche um die z-Achse.

Lösung:



Skizze: Die Schaubilder der beiden Funktionen und die eingeschlossene Fläche.

Aus der Skizze ergeben sich, da ein Drehkörper vorliegt, die folgenden Integrationsgrenzen, wobei wir wieder x durch r ersetzen können:

- Für z: von $z=0{,}75r^2$ bis $z=0{,}5r^2+1$
- Für r: von $r=0$ bis $r=2$ (siehe Skizze, Schnittpunkte dort betrachten, diese können auch ganz leicht berechnet werden)
- Für φ: von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ (Drehkörper, d.h. eine volle Umdrehung)

Nun können wir das Integral aufstellen (*Transformationsregeln* beachten!).

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0{,}75r^2}^{0{,}5r^2+1} r\,dz\,dr\,d\varphi = 2\pi \cdot \int_{r=0}^{2} \left[rz\right]_{z=0{,}75r^2}^{0{,}5r^2+1} dr = 2\pi \cdot \int_{r=0}^{2} \left(-\tfrac{1}{4}r^3 + r\right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{16}r^4 + \tfrac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{2} = 2\pi \cdot \left[\underbrace{-\tfrac{1}{16}\cdot 2^4 + \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + 0 - 0}_{=1}\right] = 2\pi \approx 6{,}3\ \text{VE}$$

Aufgabe A5:

Auf einem L-förmig eingezäunten Stück Wiese ist an der linken oberen Ecke eine Ziege mit einer Leine der Länge ρ („roh“) angebunden. Die Bezeichnungen für die Maße der Wiese finden Sie in Abbildung 1. Für die Länge der Leine soll gelten, dass diese mindestens weiter als bis zur Ecke P geht und maximal so lang ist, wie die kürzere der beiden Kanten a oder f. Mathematisch formulieren wir das wie folgt (versuchen Sie diese Ungleichungskette nachzuvollziehen!):

$$\sqrt{e^2 + b^2} < \rho < \min\{a, f\}$$

Welche Fläche kann die Ziege damit also abgrasen?

Tipp:

Berechnen Sie zuerst, welche Fläche im Rechteck mit den Kanten e und f abgegrast werden kann. Berechnen Sie das dann auch für das Rechteck mit den Kanten a und b. Überlegen Sie sich anschließend, wie diese beiden Rechtecke kombiniert werden können.

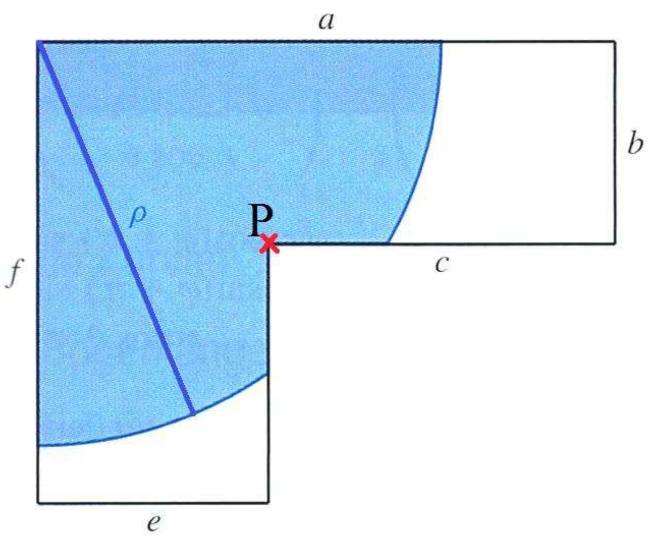
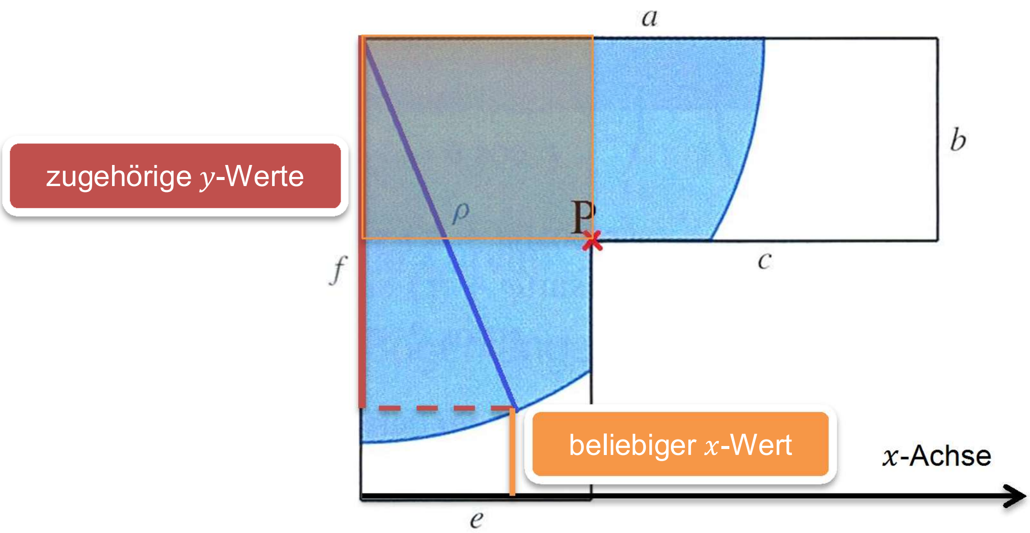


Abbildung 1: Das von der Ziege abgegraste Gebiet.

Lösung:

Welches der beiden Rechtecke wir zuerst berechnen, ist egal (Wir nehmen das mit den Kanten e und f). Wir können nachher einfach die Variablen austauschen. Für den Flächeninhalt verwenden wir ein Doppelintegral. Dabei laufen die Variablen x und y in den folgenden Grenzen:

- Für x: Von $x=0$ bis $x=e$.
- Für y: Für jedes x kann die Ziege die Längen von $y=0$ bis $y=\sqrt{\rho^2-x^2}$ in y-Richtung zurücklegen (Projektion des Seils auf die y-Achse).



Damit können wir die erste der beiden Flächen berechnen:

$$A_1=\int\limits_{x=0}^{e}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{\rho^2-x^2}}dydx=\int\limits_{x=0}^{e}\sqrt{\rho^2-x^2}\,dx=$$ Integraltafel aus dem 2. Semester (damit man das Ding auch einmal braucht) $=\left[\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\rho^2-x^2}+\frac{\rho^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{\rho}\right]_0^e=\frac{e}{2}\cdot\sqrt{\rho^2-e^2}+\frac{\rho^2}{2}\cdot\arcsin\frac{e}{\rho}$.

Bei dem Rechteck mit den Abmessungen a und b ergibt sich ganz analog (ohne Rechnung, einfach in die eben gefundene Formel einsetzen)

$$A_2=\frac{b}{2}\cdot\sqrt{\rho^2-b^2}+\frac{\rho^2}{2}\cdot\arcsin\frac{b}{\rho}.$$

Bilden wir nun A_1+A_2, so zählen wir das Rechteck mit den Kanten e und b doppelt (siehe Skizze oben), womit wir es abziehen müssen. Es ergibt sich:

$$A=A_1+A_2-be=\frac{e}{2}\cdot\sqrt{\rho^2-e^2}+\frac{\rho^2}{2}\cdot\arcsin\frac{e}{\rho}+\frac{b}{2}\cdot\sqrt{\rho^2-b^2}+\frac{\rho^2}{2}\cdot\arcsin\frac{b}{\rho}-be$$

Aufgabe A6:

Die Gesamtmasse eines Körpers K erhält man, indem man seine Dichte ρ über das Volumen integriert, d.h.

$$M = \iiint_K \rho dV .$$

Mit diesem Wissen berechne man die Masse eines geraden Zylinders mit Radius R und Höhe $2R$, dessen Dichte von der Symmetrieachse nach außen linear von 0 auf 1 zunimmt. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Überlegen Sie sich, dass die Dichte unabhängig von der Höhe und dem Winkel immer $\rho(r) = \frac{r}{R}$ sein muss, wenn man Polarkoordinaten verwendet und begründen Sie diese Funktionsgleichung.

b) Stellen Sie das Integral in Polarkoordinaten auf, wobei Sie den Korrekturterm aus der Vorlesung nicht vergessen sollten. Berechnen Sie den Wert des Integrals im Anschluss.

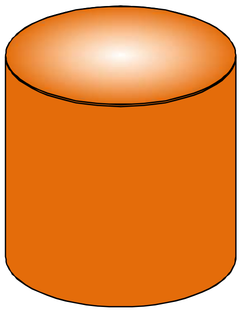


Abbildung 2: Zum Dichteverlauf in dem in Aufgabe A6 beschriebenen Zylinder.

Lösungen:

a) Nimmt die Dichte linear mit dem Abstand von 0 auf 1 zu, muss $\rho(0) = 0$ und $\rho(R) = 1$ gelten. Setzen wir das in die Geradengleichung ein, so ergibt sich der geforderte Funktionsterm, wenn r die Laufvariable ist.

b) Wir berechnen das Volumen (mit Korrekturterm), wobei wir einige Schritte zusammen durchführen (z.B. Integration nach z und φ in einem Schritt, was durch die konstanten Integrationsgrenzen möglich ist (hierdurch ist die Integrationsreihenfolge auch egal)):

$$M = \iiint_K \rho dV = \iiint_K \tfrac{r}{R} dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{2R} \tfrac{r}{R} \cdot r dz dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{2R} \tfrac{r^2}{R} dz dr d\varphi = 2\pi \cdot \int_{r=0}^{R} \left[\tfrac{r^2}{R} \cdot z \right]_{z=0}^{2R}$$

$$= 2\pi \cdot \int_{r=0}^{R} 2r^2 dr = 2\pi \cdot \left[\tfrac{2}{3} r^3 \right]_{r=0}^{R} = \underline{\tfrac{4}{3}\pi R^3 \text{ ME}}$$

Aufgabe A7:

Was ändert sich an Aufgabe A6, wenn die Dichte von der Symmetrieachse nach außen linear von 1 auf 0 abnimmt. Welcher der beiden Zylinder (der hier oder aus Aufgabe A6) ist massereicher?

Lösung:

Gleiche Argumentation wie in Aufgabe A6, wobei $\rho(0)=1$ und $\rho(R)=0$ ist, ergibt eine Dichtefunktion ρ mit $\rho(r)=1-\frac{r}{R}$. Damit können wir die gleiche Rechnung wie in A6 durchführen:

$$M=\iiint_K \rho dV=\iiint_K \left(1-\tfrac{r}{R}\right)dV=\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{2R}1\cdot rdzdrd\varphi}_{\text{normaler Zylinder mit } h=2R \text{ und Radius } R}-\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{2R}\tfrac{r}{R}\cdot rdzdrd\varphi}_{\text{aus Aufgabe A6}}=$$

$$=2\pi R^3-\tfrac{4}{3}\pi R^3=\underline{\tfrac{2}{3}\pi R^3 \text{ ME}}$$

Damit ist das Volumen des Zylinders in Aufgabe A6 das größere.

Aufgabe A8:

Hinweis I:

Verwenden Sie Kugelkoordinaten

$$x=r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta,\ y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta \text{ und } z=r\cdot\cos\vartheta$$

Hinweis II:

Wenn Sie nach Kugelkoordinaten transformieren, muss die Integrandfunktion zusätzlich zur Ersetzung der Variablen nach den Formeln in Hinweis I mit $r^2\cdot\sin\vartheta$ multipliziert werden. Es ist $drd\varphi d\vartheta$ die Reihenfolge beim Integrieren.

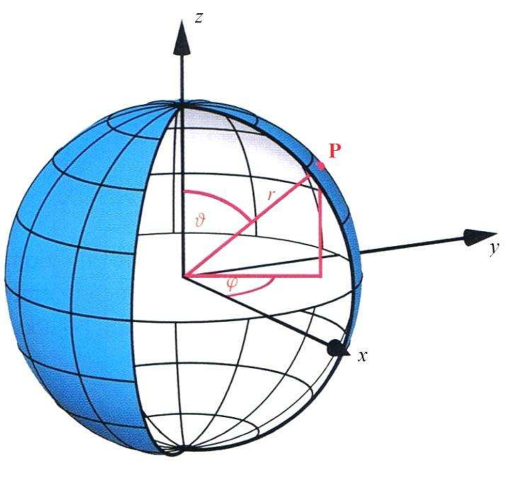


Abbildung 3: Kugelkoordinaten im Bilde.

a) Berechnen Sie die Masse einer Kugel K mit dem Radius R und der mit dem Abstand zum Mittelpunkt linear von 0 auf 1 zunehmenden Dichte ρ. Überlegen Sie sich, dass in Kugelkoordinaten $\rho = \frac{r}{R}$ gilt (analog zu Aufgabe A6).

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_z dieser Kugel bezüglich der z-Achse durch den Kugelmittelpunkt (Formel S. 37 im Skript, ρ darf hier nicht herausgezogen werden (**Warum?**)!).

Lösungen:

a) Die Argumentation für die Dichtefunktion ist ganz analog zu der Argumentation in Aufgabe A6, sogar die Werte sind die gleichen. Damit können wir, mit dem Hinweis in dem gelben Kasten, wie folgt die Masse berechnen:

$$M = \iiint_K \rho dV = \iiint_K \tfrac{r}{R} dV = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \tfrac{r}{R} \cdot r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \tfrac{r^3}{R} \cdot \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\tfrac{r^4}{4R} \sin\vartheta\right]_{r=0}^{R} d\varphi d\vartheta = 2\pi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\tfrac{R^3}{4} \cdot \sin\vartheta\right) d\vartheta = 2\pi \cdot \left[-\tfrac{R^3}{4} \cdot \cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\pi} = -\pi \tfrac{R^3}{2} \cdot [-1-1]$$

$$= \pi R^3 \text{ ME}$$

b) Da die Dichte ρ nicht konstant ist, kann sie auch nicht aus dem Integral herausgezogen werden. Wir müssen also den langen Weg gehen, wobei wir wieder in Kugelkoordinaten rechnen, da es die Symmetrie des Problems gebietet. Für den für das Trägheitsmoment benötigten Abstand rechnen wir

$$r_A{}^2 = x^2 + y^2 = (r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta)^2 + (r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta)^2 = r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{=1}$$

$$= r^2 \cdot \sin^2\vartheta.$$

Damit stellen wir nun die Formel von Seite 37 auf, wobei die Dichte mit ins Integral muss. Diese kennen wir aus Aufgabenteil a) und den Korrekturterm aus dem gelben Kasten.

$$J_z = \iiint_K \rho r_A^2 dV = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \left(\tfrac{r}{R} \cdot r^2 \sin^2\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta\right) dr d\varphi d\vartheta =$$

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \left(\tfrac{r^5}{R} \cdot \sin^3\vartheta\right) dr d\varphi d\vartheta = 2\pi \cdot \tfrac{R^6}{6R} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta \underset{\substack{\text{siehe Aufgabenbl att 3} \\ \text{in den Lösungen}}}{=}$$

$$= \tfrac{\pi R^5}{3} \cdot \left[\tfrac{2}{3} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta - \underbrace{\tfrac{1}{3} \cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}_{=0}\right]_{\vartheta=0}^{\pi} = \tfrac{\pi R^5}{3} \cdot \left[-\tfrac{2}{3} \cdot \cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\pi} = -\tfrac{2\pi}{9} R^5 \cdot [-1-1] = \frac{4}{9} \pi R^5$$