Mathematik 3 – MB – Übungsblatt 5

*****LÖSUNGSVORSCHLÄGE*****

Themen:

Vektoranalysis

Aufgabe A1:

Beschreiben Sie die folgenden Kurven durch parameterabhängige Ortsvektoren und geben Sie jeweils den Tangentenvektor an:

a) $y = 4x^2$ mit $x \geq 0$.

b) Mittelpunktkreis mit Radius R und mathematisch positivem Umlaufsinn.

c) Gerade durch den Ursprung mit der Steigung $m = 2$.

Lösungen:

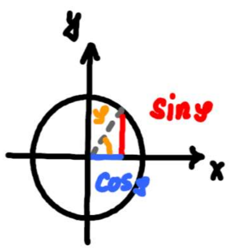
a) Wir können uns eine Parametrisierung für x (so dass alle positiven reellen Zahlen vorkommen, weil $x \geq 0$!) überlegen und dann in y einsetzen.

Wir wählen z.B. $x = t \Rightarrow y = 4t^2$

Wünsch Dir was, d.h. Wahlfreiheit!

Damit erhalten wir $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4t^2 \end{pmatrix}$ und durch **komponentenweises Ableiten** ergibt sich der Tangentenvektor[1] $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(t) \\ \frac{d}{dt}(4t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8t \end{pmatrix}$ für $t \geq 0$.

b) Wir betrachten die folgende kleine Skizze:



Skizze 1: Einheitskreis mit Sinus und Kosinus.

Hier ist $\varphi = t$ und damit ergibt sich, wenn einen Kreis mit Radius R betrachten[2], der Ortsvektor $\vec{r}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, welcher über die **komponentenweise Ableitung** den Tangentenvektor $\dot{\vec{r}}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ liefert, wobei $t \in [0; 2\pi)$ (**Winkel!**).

---

[1] Haben wir im Folgenden mit der Leibniz-Notation niedergeschrieben, damit klar ist, was wie abgeleitet wird.

[2] Dieser erzeugt lediglich einen Streckfaktor R.

c) Wie in a) setzen wir $x = t$. Dann überlegen wir uns, wie die Geradengleichung aussieht:

$$\textbf{Gerade: } y = mx + c \rightarrow \textbf{Ursprungsgerade: } y = mx \xrightarrow{m=2} y = 2x$$

Damit haben wir $x = t$ und $y = 2t$ und analog zu a) und b) ergeben sich:

$$\textbf{Ortsvektor: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Ableiten}]{\text{komponentenweises}} \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe A2:

Differenzieren Sie zweimal nach t.

a) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ e^t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot \cos t \\ e^{-t} \cdot \sin t \\ t \end{pmatrix}$

Lösungen:

Wir differenzieren hier mit den ganz normalen Regeln, eben nur für jede Komponente separat!

a) Mit dem Hinweis ergeben sich unter **Verwendung der Kettenregel** in Komponente 1 und 3 die folgenden beiden Vektoren:

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2t) \\ e^t \\ -2 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix} \text{ und } \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(2t) \\ e^t \\ -4 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}$$

b) Hier kommen in den Komponenten 1 und 2 die **Kettenregel und die Produktregel** zum Einsatz. Indem wir die Exponentialfunktion in eben diesen Komponenten ausklammern, erhalten wir:

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\sin t + \cos t) \cdot e^{-t} \\ -(\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\cos t - \sin t) \cdot e^{-t} - (\sin t + \cos t) \cdot e^{-t} \cdot (-1) \\ -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} - (\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} \cdot (-1) \\ 0 \end{pmatrix} = 2e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei passiert es bei der zweiten Ableitung durch die Produktregel und den negativen Exponenten tatsächlich, dass **nur jeweils eine der trigonometrischen Funktionen pro Komponente** stehen bleibt!

Aufgabe A3:

Gegeben ist die folgende Raumkurve: $\vec{r}(t) = 2\cdot\cos(5t)\cdot\vec{e}_x + 2\cdot\sin(5t)\cdot\vec{e}_y + 10t\cdot\vec{e}_z$.

Bestimmen Sie den Tangenten- und den Hauptnormaleneinheitsvektor sowie die Krümmung der Kurve für $t = \frac{\pi}{4}$.

Lösungen:

Wir müssen hier nur die Formeln aus der Vorlesung verwenden. Hier sind sie **zur Erinnerung**:

Formeln (immer in Abhängigkeit von t bzw. einem anderen Parameter):

Tangenteneinheitsvektor: $\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|}$

Wieder wird **komponentenweise abgeleitet (mit Kettenregel)**, vorher notieren wir aber den Vektor in der bekannten Variante:

$$\vec{r}(t) = \underline{2\cdot\cos(5t)}\cdot\vec{e}_x + \underline{2\cdot\sin(5t)}\cdot\vec{e}_y + \underline{10t}\cdot\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \underline{2\cdot\cos(5t)} \\ \underline{2\cdot\sin(5t)} \\ \underline{10t} \end{pmatrix}$$

Ableiten:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -10\cdot\sin(5t) \\ 10\cdot\cos(5t) \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\vec{r}}| \overset{\text{Phytagoras}}{=} \sqrt{(-10\sin(5t))^2 + (10\cos(5t))^2 + 10^2} =$$

$$= 10\cdot\sqrt{\underbrace{\cos^2(5t)+\sin^2(5t)}_{=1}+1} = 10\sqrt{2}$$

Damit haben wir

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{1}{10\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} -10\sin(5t) \\ 10\cos(5t) \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diesen Vektor leiten wir nochmal ab: $\dot{\vec{T}}(t) = \frac{5}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ -\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann ermitteln wir den Betrag, wobei wieder das **einzige trigonometrische Additionstheorem benutzen, welches wir auswendig wissen sollten**:

$$\left|\dot{\vec{T}}(t)\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{\underbrace{\cos^2(5t)+\sin^2(5t)}_{=1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Damit haben wir $\vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{\left|\dot{\vec{T}}(t)\right|} = \begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ -\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nun setzen wir nur noch für t den Wert $\frac{\pi}{4}$ ein!

$$\vec{T}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun fehlt uns nur noch die **Krümmung**, wobei wir auf unsere Ergebnisse bisher zurückgreifen und dann die folgende Formel verwenden können:

Formel (Krümmung):

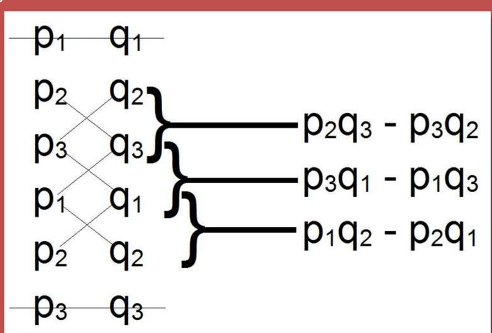
Krümmung: $\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$

Wir haben ja bereits folgende Vektoren und Beträge gefunden:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -10\sin(5t) \\ 10\cos(5t) \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = 10\sqrt{2} \text{ und } \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -50\cos(5t) \\ -50\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun bilden wir das Kreuzprodukt nach dem bekannten Schema:

Schema (Kreuzprodukt):



$$\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}-10\sin(5t)\\10\cos(5t)\\10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-50\cos(5t)\\-50\sin(5t)\\0\end{pmatrix}\overset{\text{Schema}}{=}\begin{pmatrix}500\sin(5t)\\-500\cos(5t)\\500\sin^2(5t)+500\cos^2(5t)\end{pmatrix}=500\cdot\begin{pmatrix}\sin(5t)\\-\cos(5t)\\1\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\kappa=\frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}=\frac{500\cdot\sqrt{\sin^2(5t)+\cos^2(5t)+1^2}}{\left(10\sqrt{2}\right)^3}=\frac{500\sqrt{2}}{2000\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$$, **unabhängig** von t!

Hiermit ist auch $\kappa=\frac{1}{4}$ für $t=\frac{\pi}{4}$.

Aufgabe A4:

Bestimmen Sie für die Raumkurve $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^2 & t & t^2\end{pmatrix}^T$ die Bogenlänge für $0\le t\le 1$ und die Krümmung sowie den Krümmungsradius für $t=1$.

Lösungen:

Aus der Raumkurve $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^2\\t\\t^2\end{pmatrix}$ folgt der Tangentenvektor $\dot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}2t\\1\\2t\end{pmatrix}$ den wir für die Ermittlung der Bogenlänge benötigen.

Formel (Bogenlänge):

$$s=\int_{t=a}^{b}\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|dt$$

Wird in einer Klausur angegeben!

Damit erhalten wir:

$$\int_{t=0}^{1}\sqrt{(2t)^2+1^2+(2t)^2}\,dt=\int_{t=0}^{1}\sqrt{8t^2+1}\,dt=1{,}8116$$

Nun berechnen wir die Krümmung. Die erste Ableitung des Ortsvektors haben wir ja bereits berechnet, die zweite ist $\ddot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$. Damit bilden wir **nach dem Schema aus Aufgabe A3**

das Kreuzprodukt: $\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}2t\\1\\2t\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{matrix}\cancel{2t} & \cancel{2}\\1 & 0\\2t & 2\\2t & 2\\1 & 0\\\cancel{2t} & \cancel{2}\end{matrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow$ Betrag: $\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Der noch benötigte Betrag zur Berechnung der Krümmung **wurde bereits für das Integral berechnet**. Daher erhalten wir für die **Krümmung**:

$$\kappa(t)=\frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}=\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{8t^2+1}\right)^3}=\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\left(8t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Der Kehrwert ist der **Krümmungsradius**:

$$\rho(1)=\frac{1}{\kappa(1)}=1:\frac{2\sqrt{2}}{\left(8\cdot 1^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{27}{2\sqrt{2}}=\underline{\frac{27}{4}\sqrt{2}}.$$

Aufgabe A5:

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}(t)=\begin{pmatrix}t & t^2 & t^3\end{pmatrix}^T$, $\vec{b}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t & 2\sin t & t^2\end{pmatrix}^T$ und $\vec{c}(t)=\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-t} & t\end{pmatrix}^T$. Berechnen Sie die 1. Ableitung von

a) $\vec{a}\bullet\vec{b}$ b) $\vec{b}\bullet\vec{c}$ c) $\vec{a}\times\vec{b}$ d) $\vec{a}\times\vec{c}$

Lösungen:

Wir gehen davon aus, dass **die Berechnungen von Kreuz- und Skalarprodukt keine größeren Schwierigkeiten mehr bereiten**. Daher geben wir hier nur die Ableitungsregeln für die jeweilige Aufgabe und die Ableitungen der drei gegebenen Vektoren an.

Die Ableitungen:

$$\dot{\vec{a}}(t)=\begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix},\ \dot{\vec{b}}(t)=\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\2t\end{pmatrix}\text{ und }\dot{\vec{c}}(t)=\begin{pmatrix}-e^{-t}\\-e^{-t}\\1\end{pmatrix}.$$

Die Rechnungen können hier auch **ohne die Ableitungsregeln** gerechnet werden, indem man erst die Produkte bestimmt und dann die Ableitungen bildet. Zum Einüben der Ableitungsregeln verwenden wir diese aber in der vorliegenden Aufgabe:

a) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)=\dot{\vec{a}}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\dot{\vec{b}}=\begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\cos t\\2\sin t\\t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\2t\end{pmatrix}=5t^4+2t\cdot\sin t+\left(2+2t^2\right)\cdot\cos t$$

b) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{b}\bullet\vec{c}\right)=\dot{\vec{b}}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\dot{\vec{c}}=\text{Rechnung wie in Teil a)}=3t^2-4e^{-t}\cdot\sin t$$

c) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}}=\begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\cos t\\2\sin t\\t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t^3-6t^2\cdot\sin t-2t^3\cdot\cos t\\-3t^3-2t^3\cdot\sin t+6t^2\cdot\cos t\\\left(2+2t^2\right)\cdot\sin t-2t\cdot\cos t\end{pmatrix}$$

d) $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=\dot{\vec{a}}\times\vec{c}+\vec{a}\times\dot{\vec{c}}=\text{Rechnung wie in Teil c)}=\begin{pmatrix}3t^2+\left(t^3-3t^2\right)\cdot e^{-t}\\-2t-\left(t^3-3t^2\right)\cdot e^{-t}\\\left(1-3t+t^2\right)\cdot e^{-t}\end{pmatrix}$