DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

Themen:

Vektoranalysis – Weitere Übungen

Aufgabe A1:

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der folgenden Ortsvektoren:

a) $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(2u) \\ 2\cdot\sin(2u) \\ v^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\left(\lambda^2-\mu^2\right) \\ \lambda\mu \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe A2:

Gegeben ist eine Rotationsfläche mit der Parameterdarstellung $x = u$, $y = v$ und $z = \sqrt{u^2 + v^2 + 4}$. Bestimmen Sie im Flächenpunkt P, der zu den Parameterwerten $u = 1$ und $v = -2$ gehört, die folgenden Größen:

a) Die Tangentenvektoren $\vec{t}_u$ und $\vec{t}_v$,

b) die Flächennormale $\vec{N}$,

c) die Tangentialebene.

Aufgabe A3:

Zeigen Sie: Das skalare Vektorfeld $\phi = \ln r$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ besitzt den Gradienten $\operatorname{grad}\phi = \frac{1}{r^2}\cdot\vec{r}$.

Aufgabe A4:

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\phi(x,y,z) = xyz + 3xz^3$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = (1 \quad -2 \quad 2)^T$ im Raumpunkt $P(1/2/1)$.

Aufgabe A5:

Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\phi(x,y) = x^2 - y^2$ im Punkt $P(3/4)$ in radialer Richtung.

Aufgabe A6:

Bestimmen Sie die Divergenz des Gradienten der skalaren Funktion $\phi(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2$.

Aufgabe A7:

Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder:

a) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2 z - y^2 z \end{pmatrix}$

Aufgabe A8:

Wo verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 y - 4y \end{pmatrix}$?

Aufgabe A9:

Zeigen Sie, dass das räumliche Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz + y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

wirbelfrei ist und deswegen als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(x,y,z)$ dargestellt werden kann. Bestimmen Sie dieses sog. Potentialfeld.